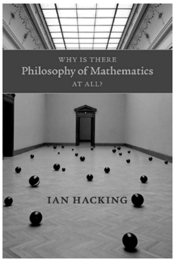
Философия математики: непреходящая и изменчивая



Ian Hacking. Why is There Philosophy of Mathematics at All? Cambridge: Cambridge University Press, 2014.— 308 p.

НЕСКОЛЬКО исследований известного канадского философа науки Яна Хакинга (родился в 1936 году) были посвящены истории представлений о вероятности, вероятностной логике и статистических выводах. Так что некоторые представители старшего поколения отечественных философов науки связывали его имя с вероятностной логикой. Но после того как на русский язык была переведена его книга «Представление и вмешательство» (1983)[1], Хакинга начали воспринимать как соучастника «прагматического» (или «материального») поворота. Отсюда интерес к его книге «Почему вообще существует философия математики?»[2]: кем же предстанет он в этой работе?

Прежде всего он предстает свободным от принадлежности к тому или иному направлению, раскованным и весьма эрудированным автором. Книга полна сведений из математики и ее истории, а также истории философии математики. Какой бы вопрос ни затрагивался, Хакинг углубляется в его историю и предысто-

Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (научно-исследовательский проект № 17-03-257 «Онтология и эпистемология в компьютерной культуре») в рамках работы выдающейся научной школы МГУ имени М.В. Ломоносова «Трансформация культуры, общества и истории: философско-теоретическое осмысление».

1. *Hacking I.* Representing and Intervening. Introductory Topics in the Philosophy of Natural Science. Cambridge: Cambridge University Press, 1983 (русский перевод: *Хакинг Я.* Представление и вмешательство. Введение в философию естественных наук / Пер. с англ. С. Кузнецова. М.: Логос, 1998).
2. Уже после написания рецензии книга была издана на русском языке, см.: *Он же.* Почему вообще существует философия математики? М.: Канон+, 2020. Далее страницы указаны по оригинальному изданию.

рию. Он прослеживает истоки употребляющихся в современных дискуссиях терминов и показывает сдвиги в их значениях, уделяет внимание тонкостям перевода немецких (например, *Bedeutung*) или французских терминов и неизбежным при переводе сдвигам значения. Хакинг не упускает и возможности сообщить биографические сведения о тех или иных авторах. Становится ясно, что значительную часть известных философов-аналитиков XX века он знал лично или общался с людьми, которые знали их лично.

Из книги можно узнать много интересного о современной математике и современных математиках. Хакинг использует материалы с сайтов выдающихся ученых — лауреатов Филдсовской премии. Поэтому на страницах книги мы наблюдаем не абстрактные позиции, а людей, принадлежащих к определенному времени и культуре. Хакинг упоминает о своем общении с Имре Лакатосом. Он вспоминает точную дату своей покупки «Замечаний по основаниям математики» Витгенштейна[3] — 6 апреля 1959 года — и признается, что полюбил эту работу и остается под ее влиянием (2). Уже то, что дата в точности сохранилась в его памяти спустя без малого 60 лет, без лишних слов показывает отношение Хакинга к Витгенштейну.

Витгенштейн так или иначе постоянно присутствует на страницах данной книги, хотя читатели не найдут здесь ни интерпретации его учения, ни конкретных его высказываний по поводу оснований математики. Однако духу Витгенштейна, как мне представляется, эта книга верна.

Интересная деталь: порой, перебрав и описав некоторое число работ на определенную тему (часто используются и материалы личной *e-mail*-переписки), Хакинг вспоминает — подчас его критикуют за то, что он забывает указать собственную позицию. Он даже признает такую критику справедливой. Но, спрашивает он, разве так уж важно личное мнение отдельного человека? Не правда ли, экстравагантная установка для автора книги? Однако для Хакинга она очень естественна. Чувствуется, он пишет то, что ему хочется, и не пишет того, что ему не хочется. В результате под его пером возникает картина параллельной жизни философии математики и самой математики. В философии математики понятия и вопросы возникают и претерпевают модификации, изменения значений, так

3. *Wittgenstein L.* Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik / Remarks on the Foundations of Mathematics. Oxford: Blackwell, 1956 (русский перевод: *Витгенштейн Л.* Замечания по основаниям математики // Философские работы. М.: Гнозис, 1994. Ч. II. Кн. I).

что следующие поколения уже не осознают, что изначально их вопросы и понятия имели другие значения. В разные эпохи на первый план выходят разные вопросы. Все исторично, ничто не оказывается простым и однозначным, и ни одна проблема не разрешается, а жизнь философии математики продолжается. На таком фоне становится понятным, что мнение отдельного человека не имеет особого значения. Все равно вопросы философии математики не разрешаются, а у следующих поколений наверняка изменятся и постановка вопросов, и значение используемых понятий.

Однако в конечном счете тут и прочитывается позиция автора книги. Математика, как и философия математики, слишком многообразна, чтобы ее можно было объяснить каким-либо одним «-измом». Ведущее настроение всей книги Хакинга — всматриваться в сложность и разнообразие.

Хакинг выбрал для своей книги несколько эпиграфов, в том числе из Витгенштейна и Лакатоса. Их общий лейтмотив состоит в том, что математика — антропологический феномен.

Почему существует философия математики? Первый ответ: существование и особенности доказательства

Но все-таки: почему появилась и существует философия математики? Конечно, существуют и философия биологии, и философии других наук. Однако их значение для философской мысли несопоставимо со значением философии математики. Достаточно вспомнить Платона и Канта: их философии не было бы без математики, а без них мировая философия не была бы такой, как она есть.

Хакинг видит в Платоне мыслителя, с которого началась философия математики. Что же именно в математике так стимулировало Платона? Особое переживание, которое дает математическое доказательство: оно может поражать силой убеждения, заставляющей человека принять даже то, с чем ему не хочется соглашаться (вспомним хотя бы доказательство иррациональности $\sqrt{2}$). В то же время математическое доказательство способно служить средством обнаружения неожиданных фактов относительно чисел, фигур и т. п. То есть оказывалось, что чистое мышление само по себе способно приходить к чему-то новому и неожиданному! И одной из главных причин существования философии математики, полагает Хакинг, является убеждение, опирающееся на реальное переживание открытия чего-то неизвестного, от математиков не зависящего, — убеждение в существовании особой математической реальности и в том, что чистое мышление дает ключи к ней.

Философия Платона была попыткой объяснить эти удивительные возможности математического доказательства. Затем идеи Платона продолжили жить собственной жизнью в философии. А что касается математических доказательств, то Хакинг показывает, насколько они многообразны. Так, противоположные представления о природе математического доказательства были у Декарта и Лейбница, но их образы доказательства обозначают собой лишь крайние точки разнообразия типов доказательств, встречающихся в математике. Для Декарта доказательство должно быть чем-то наглядным, что охватывается единым взором: отсюда проистекает его убедительность. Чтобы понимать доказательство, надо держать его в уме как целое, и такого представления до сих пор придерживаются многие работающие математики.

В отличие от картезианского, понимание математического доказательства у Лейбница вполне современное: доказательство есть конечная последовательность предложений, каждое из которых либо является аксиомой, либо следует из предшествующих предложений данной последовательности согласно одному из правил вывода. Такое понимание не апеллирует ни к какой наглядности и очевидности, ни к какому особому опыту. При таком понимании возможна пошаговая механическая проверка. Недаром Лейбниц старался придумать логическую машину, которая сама бы делала выводы о любых предметах.

Во второй половине XX века в математике стало слишком много доказательств, которые уже невозможно обозреть и с которыми не может быть связано переживание убедительности. Хакинг приводит пример (90) доказательства, опубликованного в 2004 году в двух томах, — и это не компьютерное доказательство. С тех пор его не прочитал целиком ни один человек; впрочем, в 2005 году было объявлено, что команда специалистов перепроверила его по частям. Среди примеров доказательств, приводимых Хакингом, и связанных с ними историй есть и пример теоремы, доказанной путем перевода ее на язык электрических цепей. Это не соответствует ни картезианскому, ни лейбницианскому пониманию природы доказательства. И вообще, показывает Хакинг, существует много типов доказательств, и только немногие из них тяготеют к картезианскому или лейбницианскому типу.

Особое внимание в книге уделяется компьютерным доказательствам, которые преображают облик современной математики. С одной стороны, они могут выступать развитием лейбницианского понимания доказательства, которое естественно сочеталось с идеей механической проверки его правильности, но, с другой стороны, вопрос о правильности доказательства оказался связан с проблемами нового рода — с надежностью самих компьютеров.

> В наши дни возник еще один вопрос, вопрос о *частоте появления ошибки* для данного компьютера, который пока еще не особенно активно обсуждается философами, но уже превратился в особую область математики (64).

Для современной математики становится характерным и машинный поиск контрпримеров к предположениям, и компьютерные проверки доказательств, построенных людьми, и компьютерные доказательства теорем, недоступные для человеческой проверки. Еще более важным симптомом существенных сдвигов в современной математике выступает для Хакинга появление такой области, как «экспериментальная математика», с собственным журналом *Experimental Mathematics*, который начал выходить в 1992 году. Фактически, объясняет Хакинг, математики экспериментировали всегда, даже когда рисовали свои чертежи на песке, но сейчас эта деятельность приобрела особый размах. Речь идет не о компьютерном моделировании физических или технологических процессов, но, например, об использовании компьютеров для построения возможных топологических моделей с целью проверки топологических гипотез.

Философы пока не обратили на подобные проблемы достаточного внимания, а Хакинг видит тут еще одну возможность для математики оказаться тем же, чем и некогда для Платона: открытием новых неизвестных фактов о какой-то особой реальности. Это не значит, что он сам собирается поддерживать платонизм. Он хочет освободиться от односторонности любого «-изма» и непредвзято показать многообразие математики и философии математики. Хакинг также не собирается вмешиваться в споры о том, допустимы или нет компьютерные доказательства, которые человек не может перепроверить, в «настоящей математике». Его цель при обсуждении того, что такое математическое доказательство, — показать, что «доказательство является и всегда было эволюционирующим понятием или, скорее, даже группой понятий» (40).

Почему существует философия математики? Второй ответ: существование чистой математики и прикладной математики

Второй знаковой фигурой в философии математики является, конечно, Кант. Для философии Канта математика не менее важна, чем для философии Платона, но для него волнующей загадкой оказывается нечто совершенно иное, нежели для Платона, а именно проблема: как возможно, что математика, это создание человеческого ума, применима к познанию природы? Кантовскую философию математики вызывает к жизни удивительная способность математического рассуждения антиципировать факты относительно эмпирических вещей, с которыми мы еще не имели дела.

Платоновский ответ на вызов математики чаще дает о себе знать, когда сами математики начинают философствовать. Кантовский больше затрагивает философов, хотя Хакинг и отмечает, что аналитическая философия, как бы тесно она ни была связана с философией математики, вопрос о приложениях математики совершенно игнорировала.

Среди математиков были и остаются как последователи Канта, так и приверженцы той или иной версии пифагореизма. Хакинг не собирается ни присоединяться к той или иной позиции, ни предлагать нового решения. Он немного изменяет способ смотреть на вопрос, признаваясь, что лично для него поразительна прежде всего взаимная применимость одних разделов математики для решения задач, которые появляются в других разделах. Хакинг показывает на интересных примерах, что многие из проблем геометрии могут быть решены переводом их на язык арифметики и алгебры, тогда как проблемы из теории чисел и алгебры подчас разрешаются привлечением геометрии. Словно и арифметика с алгеброй, и геометрия «говорят об одном и том же», тогда как они явно говорят о разном. Они имеют разное происхождение: считается, что геометрия создана греками, а арифметика и алгебра происходят из Индии. Для Канта арифметика и геометрия опираются на две разные априорные формы созерцания. Согласно данным современной когнитивистики, за операции с числами отвечают отделы мозга, отличные от отделов мозга, отвечающих за пространственные представления. Ясно, что арифметика с алгеброй и геометрия — не об «одном и том же», и тем не менее, например, теорема Пифагора может помочь в решении некоторых вопросов теории чисел. Хакинг здесь также не предлагает объяснений. Он просто демонстрирует сложность и важность подобной проблемы, притом что для математиков одной из увлекательнейших черт математики оказывается поразительная возможность разрешать проблемы одной области с помощью инструментария, разработанного в совершенно другой, не связанной с ней области, подобно тому как некоторые вопросы арифметики натуральных чисел проясняются с помощью комплексной плоскости. Что касается приложений математики, то сами математики предпочитают выражаться иначе. Ведь приложение — несимметричное отношение. Математики говорят об аналогиях или о соответствиях, когда результаты области *A* помогают решению проблем области *B* и наоборот.

Разговор о математике и ее приложениях далее может повести нас в двух направлениях: выяснения того, чем чистая математика отличается от прикладной и где проходит точная грань между ними, и определения того, что, собственно, есть математика.

Обе эти темы рассмотрены в книге со множеством интересных подробностей, и в обоих случаях автор доказывает, что история математики, со всеми ее деталями, в том числе разделением на чистую и прикладную, *случайна*. Хакинг призывает отказаться от «модели бабочки» (образ предопределенных стадий развития) при взгляде на историю науки. Мы могли бы сейчас иметь и другую математику, разделения на чистую и прикладную могло бы и не быть или оно было бы иным. Может быть, для понимания истории математики лучше подошла бы модель развития языка: оно не предзадано и не имеет направления, хотя подчиняется определенным закономерностям. Сама идея доказательства, которое делает заключение необходимым, есть не более чем историческая случайность. В Китае развивалась замечательная математика, обходившаяся практически без доказательств и целиком посвященная приблизительным вычислениям и результатам. Математика в Вавилоне и Месопотамии также обходилась без доказательств. Традиция торговой математики, похожей на восточную, но не на евклидову, существовала в Греции и продолжалась в Средние века. Если бы человечество последовало традициям не греческой, а, скажем, китайской математики, сейчас оно имело бы совсем иную науку.

Соответственно, бесполезны попытки определить какую-то единую и общую «сущность» математики, которая позволила бы провести грань между нею и тем, что математикой не является. Это, разумеется, относится и к ответам, предлагаемым интуиционизмом и логицизмом. Вместо поисков единой сущности Хакинг предлагает осознать реальное многообразие математики. Что общего у бытовой арифметики и теории чисел? Что общего у геометрии, которую использует столяр, и теоремы о невозможности известных построений? Так ли очевидны границы? Например, является ли математикой криптография или компьютерное моделирование? А почему мы не называем математикой шахматные задачи?

Подытоживая разные подходы к определению математики, Хакинг собирает из них своеобразное «индуктивное» определение: математика включает в себя (1) арифметику натуральных чисел, геометрию и стереометрию, а также (2) все, что изучают математики. При этом надо сознавать, что математика развивается в направлениях неожиданных и постепенно меняет свой облик. Разумеется, это человеческая деятельность, более того, деятельность телесного человека, связанная не только с мозгом, но и с рукой. И социальные аспекты человеческого существования тоже вносят свою долю в становление того, что мы называем математикой, и в то, где мы проводим грань между нею и не-математикой.

Границу между чистой и прикладной математикой воздвиг Платон. Для него граница определялась тем, что в чистой математике есть доказательства, дающие особый опыт необходимости, а в практиках вычислений, которыми пользовались торговцы, такого нет. В Новое время у Фрэнсиса Бэкона в его классификации наук мы находим понятие «смешанная математика» (учение о перспективе, астрономия, теория музыки, архитектура и инженерное дело). Это не чистая математика, «приложенная» к реальности, а смешанные исследования, в которых переплетено идеальное и материальное. У Д'Аламбера в «Предисловии» к «Энциклопедии» появляются уже чистая, смешанная и физическая математики, при этом баллистика входит в чистую математику под названием «военная геометрия». Математика Ньютона по характеру отличается от математики Лейбница: у первого она полностью геометрическая, а у Лейбница и его последователей — алгебраическая. Для Ньютона при этом «геометрия опирается на механическую практику» (149), так что работы Ньютона, как и Декарта, в глазах современников должны были выглядеть примером «смешанной», а вовсе не чистой математики.

А что собой представляет теория вероятностей, на какой ветви древа познания находится она? На нее смотрели тоже как на смешанную математику, в основном потому, что ее развивали Бернулли, которые по большей части занимались смешанной математикой. Так что древо познания, которое позднее стало древом научных дисциплин, — это во многом продукт *случайного* стечения обстоятельств. Это видно хотя бы по тому, как по-разному размещают теорию вероятностей в академических структурах современного мира. Где-то ее относят к чистой математике, где-то к прикладной. А Бурбаки вообще не включили теорию вероятностей в свою структуру математики.

Термины «чистая» и «прикладная» математика были в ходу во времена Канта, причем под «прикладной» понималось то, что раньше называлось смешанной. Так использовал эти термины сам Кант. Но в дальнейшем в немецких университетах чистая математика стала пониматься как априорное и необходимое знание. Для Карла Фридриха Гаусса арифметика именно такова, а геометрия ближе к механике. Немецкое математическое сообщество приняло позицию Гаусса: арифметика есть наука необходимая и априорная, а геометрия — синтетическая и апостериорная. Понимание, близкое современному, согласно которому чистым является то знание, которое свободно от практического интереса, мы можем видеть во французской математической традиции, хотя еще ученые поколения Жозефа Лагранжа и Пьера-Симона Лапласа о различении чистой и прикладной математики не думали. Они были просто математиками. Это различение стало складываться в специфическом историческом контексте, и Хакинг подчеркивает его обусловленность различными обстоятельствами послереволюционной Франции. И получилось так, что критерием различения стала цель исследования. Жозеф Диас Жергонн начал издавать «Анналы чистой и прикладной математики» в 1810 году. В его журнале геометрия, равно как и проективная геометрия, выступала как чистая наука, но одновременно принимались материалы, посвященные приложениям математики к теории вероятности, экономике, астрономии, географии, хронологии, архитектуре и т. д. (155).

Так что понятие «прикладной» математики остается нечетким и исторически изменчивым, а список приложений — исторически случайным. Например, среди знаменитых «проблем Гильберта» шестая касается математического исследования аксиом физики. Она относится к математике или скорее к физике? Похоже, Гильберта это волновало меньше всего. Сейчас некоторые важные математические исследования связаны с проблемами квантовой механики. Причем сами математики, которые работают над ними, считают, что занимаются чистой математикой, а их работы с равным успехом публикуют как журналы по математической физике, так и издания по алгебре и теории чисел.

Этот исторический экскурс показывает читателям не только то, что грань между чистой и прикладной математикой нечетка и неопределенна, но и то, что в конечном счете грань между математикой и тем, что не является ею, столь же нечетка. Важно понимать, что «приложения математики» работают не так, как это порой представляют философы, которые думают, что просто из общих математических положений дедуцируются выводы, которые применяют, скажем, к физической модели явления. Далеко не всегда готовый математический аппарат внедряется в какое-то эмпирическое исследование. В самых интересных и важных случаях, как это происходило, например, в квантовой механике, математика помогает артикулировать физическую (или иную) теорию, а проблемы этой теории заставляют развивать математический аппарат. Происходит взаимный процесс уточнений и концептуальной перестройки как в математической теории, так и в той теории, к которой она «прилагается».

«Вечный» вопрос философии математики: математический платонизм

Последние главы книги посвящены классической, если не сказать вечной, проблеме философии математики — вопросу о математическом платонизме. И здесь Хакинг, верный себе, отказывается занимать позицию за или против платонизма. Он хочет показать, что вопрос об особой математической реальности, относительно которой математики делают неожиданные увлекательные открытия, так просто не решается и при этом остается неизменным источником философствования. Одновременно Хакинг показывает на примерах двух современных ученых, лауреатов Филдсовской премии, что сами математики могут быть как сторонниками, так и противниками платонизма.

Вместо того чтобы подключаться к спорам о том, имеет или не имеет право на существование математический платонизм, Хакинг предпринимает исторический экскурс, показывая, что понимался он по-разному. Есть разные платонизмы и, соответственно, разные антиплатонизмы. Для кого-то платонизм означает допущение, что существуют не только натуральные числа, но и множество всех натуральных чисел вообще. Для других речь идет о признании существования всех множеств, допускаемых цермело-френкелевской аксиоматикой для теории множеств. Возможны и другие понимания.

Аналитическая философия по большей части смотрела на проблему математического платонизма сквозь призму «денотативной семантики», то есть представления о том, что должен быть *единый* способ анализа любых предложений, состоящий в том, что значениями всех входящих в предложение имен должны быть их денотаты, роль которых играют обозначаемые предметы. В таком случае, конечно, предложение о числах обязывает признать существование чисел, как предложение о множествах — признать существование множеств, и т. п. Свою задачу философы-аналитики видели в том, чтобы элиминировать из высказываний слова, обозначающие числа (или множества). Хакинг показывает, что все это далеко от того опыта открытия неожиданного, который мотивирует платонистические представления у работающих математиков. А затем он говорит о неудовлетворительности денотативной семантики. Она плоха прежде всего тем, что навязывает единственную модель анализа любых языковых выражений. Для Хакинга сомнителен и куайновский критерий онтологических обязательств языка, согласно которому существовать — значит быть значением квантифицированной переменной. Здесь, как и в остальных разделах книги, Хакинг видит свою задачу в том, чтобы преодолеть узость и стремление втиснуть все в одно объяснение. Да, мы говорим о числах. Физики строят высказывания, в которых квантифицируются переменные, пробегающие по числам, функциям и прочим математическим объектам. Даже репортажи с Олимпиады, в которых постоянно сообщается о новых рекордах, есть высказывания о числах. И что из этого следует? Лишь то, что можно говорить о числах и не быть математическим платонистом.

Свобода, раскованность, непредвзятость, готовность видеть разнообразие и исторические случайности — вот что отличает эту книгу Хакинга и его видение математики.

Зинаида Сокулер
Профессор кафедры онтологии и теории познания философского факультета МГУ им. М. В. Ломоносова